GELANGGANG HEREDITER

TEDUH WULANDARI

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Imu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Raya Pajajaran, Kampus IPB Baranangsiang, Bogor, Indonesia

Abstract. Tulisan ini membahas mengenai definisi dan contoh dari gelanggang herediter. Penulisan ini merupakan sebuah observasi.
Key words: gelanggang herediter

1. Pendahuluan

Tulisan ini berisikan mengenai definisi dan contoh dari gelanggang herediter. Penulisan ini merupakan sebuah observasi.Sebelum membahas mengenai gelanggang herediter akan dibahas terlebih dahulu mengenai barisan eksak dan modul projektif.

2. Definisi Gelanggang Herediter

Konsep barisan eksak dari R-modul dan homomorfisma modul serta hubungan keduanya dengan jumlah langsung akan banyak digunakan pada tulisan ini. Berikut definisi mengenai barisan eksak dari R-modul. Misalkan R suatu gelanggang, barisan dari R-modul dan homorfisma R-modul berikut

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

disebut *barisan eksak pada* M_i jika $\mathrm{Im}\,(f_i) = \ker\,(f_{i+1})$. Barisan tersebut disebut *barisan eksak* jika setiap barisan pada M_i merupakan barisan eksak.

Berdasarkan definisi tersebut dapat diperoleh

1. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ merupakan barisan eksak jika dan hanya jika f bersifat satu-satu.
2. Barisan $M \to M_2 \xrightarrow{g} 0$ merupakan barisan eksak jika dan hanya jika g bersifat pada
3. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ disebut barisan eksak jika dan hanya jika f bersifat satu-satu, g bersifat pada dan $\mathrm{Im}\,(f) = \ker\,(g)$.

Jika barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ merupakan barisan eksak maka barisan tersebut disebut juga *barisan eksak pendek* dan barisan tersebut disebut *barisan eksak terpisah* jika barisan tersebut barisan eksak dan $\mathrm{Im}\,(f) = \ker\,(g)$ merupakan suku langsung dari M.

Berikut teorema mengenai barisan eksak terpisah.

Teorema 1. *Jika barisan* $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ *merupakan barisan eksak pendek dari R-modul maka pernyataan berikut ekuivalen*

1. *Ada homomorfisma* $\alpha : M \to M_1$ *sedemikian sehingga* $\alpha \circ f = 1_{M_1}$
2. *Ada homomorfisma* $\beta : M_2 \to M$ *sedemikian sehingga* $g \circ \beta = 1_{M_2}$
3. *Barisan diatas adalah barisan eksak split dan*

$$\begin{aligned} M &\cong \mathrm{Im}\,(f) \oplus \ker\,(\alpha) \\ &\cong \ker\,(g) \oplus \mathrm{Im}\,(\beta) \\ &\cong M_1 \oplus M_2 \end{aligned}$$

Alur pembuktian adalah sebagai berikut
Langkah 1 $1 \to 2$ dan 3
Langkah 2 $2 \to 1$ dan 3
Langkah 3 $3 \to 1$ dan 2

Bukti. Langkah 1. Misalkan ada homomorfisma $\alpha : M \to M_1$ sedemikian sehingga $\alpha \circ f = 1_{M_1}$ dan $x \in M$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \alpha\,(x - f\,(\alpha\,(x))) &= \alpha\,(x) - (\alpha \circ f)\,(\alpha\,(x)) \\ &= \alpha\,(x) - \alpha\,(x) = 0 \end{aligned}$$

sehingga $x - f\,(\alpha\,(x)) \in \ker\,(\alpha)$. Misalkan $y = x - f\,(\alpha\,(x)) \in \ker\,(\alpha)$ maka $x = y + f\,(\alpha\,(x))$ dengan $x \in M, y \in \ker\,(\alpha)$ dan $f\,(\alpha\,(x)) \in \mathrm{Im}\,(f)$. Karena x sebarang anggota M maka $M = \ker\,(\alpha) + \mathrm{Im}\,(f)$. Misalkan $a = f\,(b) \in \ker\,(\alpha) \cap \mathrm{Im}\,(f)$ maka

$$\begin{aligned} 0 = \alpha\,(a) &= \alpha\,(f\,(b)) \\ &= \alpha \circ f\,(b) \\ &= b \end{aligned}$$

sehingga $f\,(0) = 0 = a$ akibatnya $\ker\,(\alpha) \cap \mathrm{Im}\,(f) = 0$ jadi $M = \ker\,(\alpha) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$. Pernyataan 3 terpenuhi. Karena g bersifat pada maka untuk setiap $u \in M_2$ ada $x \in M$ sedemikian sehingga $g\,(x) = u$. Tetapi karena g tidak bersifat satu-satu maka ada kemungkinan terdapat $y \in M$ sedemikian sehingga $g\,(y) = u$. Sehingga β didefinisikan dengan

$$\begin{array}{llll} \beta : & M_2 & \to & M \\ & u & \mapsto & x - f\,(\alpha\,(x)) \text{ dengan } g\,(x) = u \end{array}$$

Akan diperlihatkan bahwa β terdefinisi dengan baik. Misalkan $a, b \in M_2$ dengan $a = b$, karena g bersifat pada maka ada $u, v \in M$ sedemikian sehingga $g(u) = a$ dan $g(v) = b$. Karena $a = b$ maka $g(u) = a = g(v)$ sehingga $g(u - v) = 0$. Akibatnya $u - v \in \ker(g) = \operatorname{Im}(f)$ sedangkan

$$\begin{aligned}\beta(a) - \beta(b) &= u - f(\alpha(u)) - (v - f(\alpha(v))) \in \ker(\alpha) \\ &= u - v + (f(\alpha(u)) - f(\alpha(v))) \in \operatorname{Im}(f)\end{aligned}$$

Akibatnya $\beta(a) - \beta(b) \in \ker(\alpha) \cap \operatorname{Im}(f)$ sehingga $\beta(a) - \beta(b) = 0$. Jadi β terdefinisi dengan baik. Akan diperlihatkan $g \circ \beta = 1_{M_2}$. Misalkan $x \in M_2$, karena g bersifat pada maka ada $u \in M$ sedemikian sehingga $g(u) = x$

$$\begin{aligned}g \circ \beta(x) &= g(u - f(\alpha(u))) \\ &= g(u) - g(f(\alpha(u))) \text{ karena } \operatorname{Im}(f) = \ker(g) \\ &= g(u) - 0 \\ &= x\end{aligned}$$

Jadi $g \circ \beta = 1_{M_2}$ sehingga pernyataan 2 terpenuhi.

Langkah 2. Dengan cara yang sama dengan langkah 1 dapat ditunjukkan bahwa $2 \to 1$ dan 3

Langkah 3. Misalkan $M \cong M_1 \oplus M_2$ maka barisan eksak diatas menjadi

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & M_1 & \xrightarrow{f} & M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{g} & M_2 & \to 0 \\ & a & \mapsto & a + 0 & & & \\ & & & a + b & \mapsto & b & \end{array}$$

Definisikan

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & M_1 \oplus M_2 & \to & M_1 \\ & a + b & \mapsto & a \end{array} \quad \text{dan} \quad \begin{array}{rccc} \beta: & M_2 & \to & M_1 \oplus M_2 \\ & b & \mapsto & 0 + b \end{array}$$

Akan diperlihatkan bahwa $\alpha \circ f = 1_{M_1}$ dan $g \circ \beta = 1_{M_2}$. Ambil $x \in M_1$ dan $y \in M_2$

$$\begin{aligned}\alpha \circ f(x) &= \alpha(f(x)) \\ &= \alpha(x + 0) \\ &= x\end{aligned} \quad \text{dan} \quad \begin{aligned}g \circ \beta(y) &= g(\beta(y)) \\ &= g(0 + y) \\ &= y\end{aligned}$$

Jadi $\alpha \circ f = 1_{M_1}$ dan $g \circ \beta = 1_{M_2}$ sehingga pernyataan 2 dan pernyataan 3 terpenuhi. ■

Sebelum masuk ke modul projektif perhatikan sifat berikut ini.

Sifat 2. *Misalkan R suatu gelanggang, setiap modul atas R merupakan peta homomorfisma dari suatu R-modul bebas.*

Bukti. Misalkan M modul atas R dan $\{m_i\}_{i \in I}$ merupakan himpunan pembangun bagi M. Misalkan, untuk setiap i, F_i merupakan suatu modul bebas atas R dengan basis $\{e_i\}$. Misalkan $F = \oplus_{i \in I} F_i$ maka F merupakan modul bebas atas R dengan basis $\{e_i\}_{i \in I}$. Definisikan

$$\begin{array}{rccc} f: & F & \to & M \\ & e_i & \mapsto & m_i \end{array}$$

Jelas f merupakan homomorfisma yang bersifat pada. Jadi $\mathrm{Im}\,(f) = M$ sehingga setiap modul atas R merupakan peta homomorfisma dari suatu R-modul bebas. ■

Misalkan M modul atas gelanggang R, modul M dikatakan *modul projektif* jika untuk setiap diagram homomorfisma modul atas R

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Gambar 1. Diagram 1 modul projektif

dengan barisan homomorfisma $A \to B \to 0$ eksak, terdapat homomorfisma $f : M \to A$ sehingga $h = g \circ f$.

Hubungan antara modul projektif dan modul bebas dapat dilihat berikut ini. Misalkan M suatu modul bebas atas gelanggang R dengan basisi X. Pandang diagram homomorfisma pada Gambar 1 dengan g suatu epimorfisma. Untuk menunjukkan M merupakan modul projektif, akan ditunjukkan bahwa ada homomorfisma $f : M \to A$ sedemikian sehingga $h = g \circ f$. Misalkan $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dapat diperoleh $h(x_i) \in B$ untuk setiap i. Karena g bersifat pada maka ada $a_{x_i} \in A$ sedemikian sehingga $g(a_{x_i}) = h(x_i)$ untuk setiap i. Definisikan pemetaan

$$\begin{array}{rccc} f: & F & \to & A \\ & x_i & \mapsto & a_{x_i} \end{array}$$

f merupakan homomorfisma. Ambil sebarang $y \in F$, karena X basis bagi M maka $y = \sum_i r_i x_i$ dengan $r_i \in R$ untuk setiap i.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(y) = (g \circ f)\left(\sum_i r_i x_i\right) &= g\left(f\left(\sum_i r_i x_i\right)\right) \\ &= g\left(\sum_i r_i f(x_i)\right) = g\left(\sum_i r_i a_{x_i}\right) \\ &= \left(\sum_i r_i g(a_{x_i})\right) = \left(\sum_i r_i h(x_i)\right) \\ &= h\left(\sum_i r_i x_i\right) = h(y) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $g \circ f = h$. Jadi M merupakan modul projektif.

Untuk mempermudah pemeriksaan apakah suatu modul merupakan modul projektif, dapat digunakan teorema berikut ini.

Teorema 3. *Misalkan R gelanggang dan M R-modul. Pernyataan berikut ekuivalen*

1. *Modul M merupakan modul projektif.*
2. *Setiap barisan eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \to 0$ adalah barisan eksak terpisah.*
3. *Terdapat F modul bebas atas R dan N modul atas R sedemikian sehingga $F \cong N \oplus M$*

Bukti.
$(1 \to 2)$ Misalkan M modul projektif dan $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \to 0$ barisan eksak. Perhatikan diagram pada Gambar 2,

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "1_M"] & \\
B \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Gambar 2. Diagram 2 modul projektif

karena M modul projektif maka ada $\beta : M \to B$ sedemikian sehingga $g \circ \beta = 1_M$ berdasarkan Teorema 1 barisan eksak di atas merupakan barisan eksak terpisah.

$(2 \to 3)$ Misalkan setiap barisan eksak $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} M \to 0$ merupakan barisan eksak terpisah. Karena M R-modul berdasarkan Sifat 2 terdapat F modul bebas atas R dan epimorfisma $g : F \to M$ sedemikian sehingga $\mathrm{Im}\,(g) = M$. Misalkan $N = \ker(g)$, karena $\ker(g) \subseteq F$ maka dapat didefinisikan

$$\begin{array}{rlcl} i: & N & \to & F \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

yang merupakan monomorfisma sehingga dapat diperoleh $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} F \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ dengan $\mathrm{Im}\,(i) = \ker(g)$ sehingga barisan tersebut merupakan barisan eksak, berdasarkan hipotesis diperoleh barisan tersebut adalah barisan eksak terpisah sehingga diperoleh $F \cong N \oplus M$.
$(3 \to 1)$ Misalkan terdapat F modul bebas atas R dan N modul atas R sedemikian sehingga $F \cong N \oplus M$ akibatnya ada $h : F \to N \oplus M$ yang isomorfisma. Misalkan

$$\begin{array}{rlcl} \pi_M : & N \oplus M & \to & M \\ & a + b & \mapsto & b \end{array} \text{ dan } \begin{array}{rlcl} i_M : & M & \to & N \oplus M \\ & b & \mapsto & 0 + b \end{array}$$

sehingga $\pi_M \circ i_M = 1_M$. Perhatikan diagram yang terdapat pada Gambar 3

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[dr, shift right, "\alpha"'] & N \bigoplus M \arrow[l, shift left, "h^{-1}"] \arrow[d, shift left, "i_M"] \\
& M \arrow[ul, shift right, "\beta"'] \arrow[u, shift left, "\pi_M"]
\end{tikzcd}$$

Gambar 3. Diagram 3 modul projektif

Definisikan $\alpha = h^{-1} \circ i_M$ dan $\beta = \pi_M \circ h$. Akan ditunjukkan bahwa $\beta \circ \alpha = 1_M$. Misalkan $b \in M$, tulis $0 + b \in N \oplus M$. Karena h bersifat pada maka ada $x \in F$ sedemikian sehingga $h(x) = 0 + b$

$$\begin{aligned}
\beta \circ \alpha(b) &= \beta(\alpha(x)) = \beta\left(\left(h^{-1} \circ i_M\right)(b)\right) \\
&= \beta\left(h^{-1}(i_M(b))\right) = \beta\left(h^{-1}(0 + b)\right) \\
&= \beta(x) = \pi_M \circ h(x) \\
&= \pi_M(h(x)) = \pi_M(0 + b) \\
&= b
\end{aligned}$$

Jadi $\beta \circ \alpha = 1_M$.
Perhatikan diagram pada Gambar 4,

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift left, "\beta"] \arrow[d, dashed, "f"'] & M \arrow[l, shift left, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "k"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\
U \arrow[r, "g"] & V \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Gambar 4. Diagram 4 modul projektif

Karena F modul bebas maka F modul projektif. Akibatnya ada $f : F \to U$ sedemikian sehingga $g \circ f = \gamma \circ \beta$. Akan diperlihatkan bahwa ada $k : M \to U$ sedemikian sehingga $g \circ k = \gamma$. Definisikan $k = f \circ \alpha$, misalkan $m \in M$

$$\begin{aligned}
g \circ k(m) &= g(k(m)) = g((f \circ \alpha)(m)) \\
&= g(f(\alpha(m))) = g \circ f(\alpha(m)) \\
&= \gamma \circ \beta(\alpha(m)) = \gamma(\beta(\alpha(m))) \\
&= \gamma((\beta \circ \alpha)(m)) = \gamma(m)
\end{aligned}$$

Jadi $g \circ k = \gamma$, akibatnya M modul projektif. ■

Misalkan R suatu gelanggang, modul V_R dikatakan *modul herediter* jika V_R dan setiap submodulnya modul projektif. Dan R dikatakan *gelanggang herediter kanan* jika setiap ideal kanan dari R merupakan modul projektif atas R, dengan kata lain modul R_R merupakan herediter. Jika R merupakan gelanggang herediter kanan dan gelanggang Herediter kiri maka R dikatakan herediter.

3. Contoh Gelanggang Herediter

Berikut contoh mengenai gelanggang herediter

Contoh 4. *Misalkan $\mathbb{Z}$ gelanggang integer, $\mathbb{Q}$ lapangan hasil bagi dari $\mathbb{Z}$ dan R subring dari $M_2(\mathbb{Q})$ dengan*

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

R merupakan herediter kanan tetapi bukan herediter kiri.

Penyelesaian. Ada 2 tahap penyelesaian, pertama menunjukkan R adalah herediter kanan dan yang kedua menunjukkan R bukan herediter kiri. Misalkan $N = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$.

Tahap pertama. N dan V merupakan ideal kanan dari R karena untuk sebarang $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} \in R$ dan sebarang $\begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$, mengakibatkan $\begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_1r_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, karena $\mathbb{Q}$ lapangan dan $n_1, r_3 \in \mathbb{Q}$ maka $n_1r_3 \in \mathbb{Q}$ akibatnya $\begin{pmatrix} 0 & n_1r_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$ demikian juga untuk V. Akan ditunjukkan bahwa N dan V merupakan ideal minimal di R. Misalkan T ideal kanan dari R dengan $0 \subseteq T \subsetneqq N$ dan misalkan $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$, $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} \in R$. Karena T ideal kanan dari R maka $\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & tr_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$ sehingga agar $T \neq N$ satu-satunya pilihan untuk t adalah 0, sehingga $T = 0$ akibatnya N merupakan ideal kanan minimal. Demikian juga dengan V. Jadi N dan V merupakan ideal kanan minimal dari R. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa V_R merupakan modul projektif. Perhatikan diagram pada Gambar 5, ambil $v \in V_R$ maka $h(v) \in B$, karena g bersifat pada maka $a \in A$ sedemikian sehingga $g(a) = h(v)$ sehingga dapat didefinisikan pemetaan

$$\begin{array}{rccl} f: & V_R & \rightarrow & A_R \\ & v & \mapsto & a \qquad \text{dengan } g(a) = h(v) \end{array}$$

Akan ditunjukkan f terdefinisi dengan baik, misalkan $v, w \in V$ dengan $v = w$ maka $h(v) = h(w) \in B_R$ karena g bersifat pada maka ada

$$\begin{tikzcd} & \underset{v}{V_R} \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "h"] & \\ \underset{a}{A_R} \arrow[r, "g"] & \underset{h(v)}{B_R} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Gambar 5. Diagram 5 modul projektif

$a, b \in A_R$ sedemikian sehingga $g(a) = h(v)$ dan $g(b) = h(w)$ akibatnya $g(a) = h(v) = h(w) = g(b)$ berdasarkan definisi f diperoleh $f(a) = v = w = f(b)$, sehingga $f(a) = f(b)$. Jadi f terdefinisi dengan baik. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan homomorfisma, misalkan $u, v \in V$ maka $h(u), h(v) \in B$, karena g bersifat pada maka ada $a, b \in A$ sedemikian sehingga $g(a) = h(u)$ dan $g(b) = h(v)$ akibatnya $f(u) = a$ dan $f(v) = b$. Perhatikan

$$\begin{aligned} g(a+b) &= g(a) + g(b) \\ &= h(u) + h(v) \\ &= h(u+v) \end{aligned}$$

berdasarkan definisi f, diperoleh

$$\begin{aligned} f(u+v) &= a + b \\ &= f(u) + f(b) \end{aligned}$$

dan untuk $r \in R$

$$\begin{aligned} g(ar) &= g(a)\, r \\ &= h(u)\, r \\ &= h(ur) \end{aligned}$$

berdasarkan definisi f, diperoleh

$$f(ur) = ar = f(u)\, r$$

Jadi f merupakan homomorfisma. Akan ditunjukkan bahwa $g \circ f = h$,

$$\begin{aligned} g \circ f(v) &= g(f(v)) \\ &= g(b) = h(v) \end{aligned}$$

sehingga $g \circ f = h$. Jadi V_R merupakan modul projektif. Jelas $V_R \cong N_R$, karena pemetaan

$$\begin{array}{cccc} g: & N_R & \rightarrow & V_R \\ & \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \end{array}$$

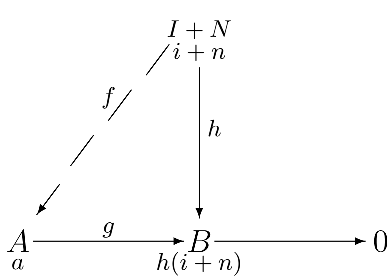
merupakan isomorfisma. Sehingga N_R juga merupakan modul projektif. Karena V_R dan N_R merupakan modul projektif maka ada F_R dan G_R modul bebas dan C_R dan D_R sedemikian sehingga $F \cong V \oplus C$ dan $G \cong N \oplus D$, akibatnya

$$\begin{aligned} F + G &= (V \oplus C) + (N \oplus D) \\ &= (V + N) \oplus (C + D) \end{aligned}$$

karena $F + G$ juga merupakan modul bebas maka $V + N$ juga merupakan modul projektif. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ideal kanan dari R yang memuat $N + V$ tetapi tidak sama dengan $N + V$ juga merupakan modul projektif. Sebelumnya perhatikan hal berikut, setiap ideal kanan dari R yang memuat $N+V$ tetapi tidak sama dengan $N + V$ akan memiliki bentuk $\begin{pmatrix} z\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$ dengan $0 \neq z \in \mathbb{Z}$ karena untuk $N + V \subsetneqq I$, misalkan $\begin{pmatrix} z & q_1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \in I$ dan $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} \in R$ diperoleh $\begin{pmatrix} z & q_1 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zr_1 & zr_2 + q_1 r_3 \\ 0 & q_2 r_3 \end{pmatrix} \in I$, sehingga I merupakan ideal kanan dari R. Jelas $I_R \cong R_R$ karena pemetaan

$$\begin{array}{cccc} g: & I_R & \rightarrow & R_R \\ & \begin{pmatrix} za & b \\ 0 & c \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \end{array}$$

merupakan suatu isomorfisma. Karena R_R merupakan modul bebas maka R_R modul projektif sehingga I_R juga merupakan modul projektif. Tahap terakhir untuk menunjukkan R Hereditary kanan adalah menunjukkan ideal kanan yang memuat N atau V tetapi tidak sama dengan N atau V merupakan modul projektif. Misalkan I ideal kanan dari R dengan $N \nsubseteqq I$ sehingga $I \cap N = 0$, akibatnya $I + N$ merupakan ideal kanan yang memuat N. Perhatikan diagram pada Gambar 6.



Gambar 6. Diagram 6 modul projektif

Ambil $i + n \in I + N$ maka $h(i + n) \in B$, karena g bersifat pada maka $a \in A$ sedemikian sehingga $g(a) = h(i + n)$ sehingga dapat didefinisikan pemetaan

$$\begin{array}{rccl} f: & I+N & \rightarrow & A \\ & i+n & \mapsto & a \quad \text{dengan } g(a) = h(i+n) \end{array}$$

Akan ditunjukkan f terdefinisi dengan baik, misalkan $i_1+n_1, i_2+n_2 \in V$ dengan $i_1+n_1 = i_2+n_2$ maka $h(i_1+n_1) = h(i_2+n_2) \in B_R$ karena g bersifat pada maka ada $a, b \in A_R$ sedemikian sehingga $g(a) = h(i_1+n_1)$ dan $g(b) = h(i_2+n_2)$ akibatnya $g(a) = h(i_1+n_1) = h(i_2+n_2) = g(b)$ berdasarkan definisi f diperoleh $f(a) = i_1+n_1 = i_2+n_2 = f(b)$, sehingga $f(a) = f(b)$. Jadi f terdefinisi dengan baik. Akan ditunjukkan bahwa f merupakan homomorfisma, misalkan $i_1+n_1, i_2+n_2 \in I+N$ maka $h(i_1+n_1), h(i_2+n_2) \in B$, karena g bersifat pada maka ada $a, b \in A$ sedemikian sehingga $g(a) = h(i_1+n_1)$ dan $g(b) = h(i_2+n_2)$ akibatnya $f(i_1+n_1) = a$ dan $f(i_2+n_2) = b$. Perhatikan

$$\begin{aligned} g(a+b) &= g(a) + g(b) \\ &= h(i_1+n_1) + h(i_2+n_2) \\ &= h((i_1+n_1) + (i_2+n_2)) \end{aligned}$$

berdasarkan definisi f, diperoleh

$$\begin{aligned} f((i_1+n_1) + (i_2+n_2)) &= a+b \\ &= f(i_1+n_1) + f(i_2+n_2) \end{aligned}$$

dan untuk $r \in R$

$$\begin{aligned} g(ar) &= g(a)\, r \\ &= h(i_1+n_1)\, r \\ &= h((i_1+n_1)\, r) \end{aligned}$$

berdasarkan definisi f, diperoleh

$$f((i_1+n_1)\, r) = ar = f(i_1+n_1)\, r$$

Jadi f merupakan homomorfisma. Akan ditunjukkan bahwa $g \circ f = h$,

$$\begin{aligned} g \circ f(i_1+n_1) &= g(f(i_1+n_1)) \\ &= g(a) = h(i_1+n_1) \end{aligned}$$

sehingga $g \circ f = h$. Jadi $I+N$ merupakan modul projektif, sehingga setiap ideal kanan dari R merupakan modul projektif, akibatnya R merupakan Heridtary kanan.

Tahap kedua. Telah diperlihatkan bahwa N merupakan ideal kanan, dengan cara yang sama dapat diperlihatkan bahwa N juga merupakan ideal kiri, sehingga N merupakan ideal dua sisi di R. Demikian juga dengan V, dapat ditunjukkan bahwa V merupakan ideal dua sisi, sehingga $A = N+V$ merupakan ideal dua sisi di R. Akan diperlihatkan bahwa $\cap_{n=1}^{\infty} nR = A = AR$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1R \cap 2R \cap 3R \cap \ldots &= 1\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap 2\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap 3\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap \ldots \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 3\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} \cap \ldots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} = N + V = A \end{aligned}$$

karena A merupakan ideal di R maka $A = Ar$ untuk setiap $r \in R$ sehingga $A = AR$. Jadi $\cap_{n=1}^{\infty} nR = A = AR$. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa jika F modul kiri atas R yang bebas maka $\cap_{n=1}^{\infty} nF = AF$. Misalkan F merupakan modul kiri atas R yang bebas dengan $X = \{x_i\}_{i \in I}$ basis bagi F. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1F \cap 2F \cap 3F \cap \ldots &= \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \cap 2\sum_{i \in I} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \\ &\quad \cap 3\sum_{i \in I} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \cap \ldots \\ &= \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \cap \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \\ &\quad \cap \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} 3\mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i \cap \ldots \\ &= \sum_{i \in I} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix} x_i = AF \end{aligned}$$

Jadi $\cap_{n=1}^{\infty} nF = AF$. Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa R bukan merupakan herediter kiri. Untuk menunjukkan R bukan herediter kiri cukup dengan menunjukkan ada ideal kiri dari R yang bukan modul projektif. Andaikan ${}_RN$ modul projektif maka ada F modul kiri atas R yang bebas dan ${}_RW$ sedemikian sehingga $F = N \oplus W$, perhatikan bawah

$$N = \cap_{n=1}^{\infty} nN \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} nF = AF$$

sehingga $AF = AN \oplus AW$ akibatnya untuk setiap $y \in AF$, y dapat ditulis dalam $y = a + b$ dengan $a \in AN$ dan $b \in AW$. Misalkan $a = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} w$ dengan $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$ dan $w \in W$ sehingga

$$\begin{aligned} y = a + b &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} w \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} w \in 0 + AW = AW \end{aligned}$$

sehingga $AF = AW$ kontradiksi dengan $F = N \oplus W$ dan $N \neq 0$. Jadi haruslah ${}_RN$ bukan modul projektif, akibatnya R bukanlah herediter kiri. ■

Daftar Pustaka

[1] Adkins, William A & Weintraub Steveh H, *Algebra An Aprroach via Module Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992
[2] Herstein, I.N., Noncommutative Rings, *The Carus Mathematical Monoghraphs number fifteen*, The Mathematical Association of America.
[3] Lam, T.Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, 1991.
[4] Lang, Serge, *Algebra*, Third Edition, Addison Wesley, New York, 1991.
[5] Passman, Donald S, *A Course in Ring Theory*, Wadsworth & Brooks, California, 1991.